日本体育大学紀要 11 号 (1982) 123-128

非線型放物型方程式の半無限領域における初期値・境界値問題の解の一意性

北　田　留　彦*

(昭和 56 年 12 月 1 日受付)

The Uniqueness of Solutions of an Initial-Boundary Value Problem for the General Nonlinear Equation of Parabolic Type in a Semi-Infinite Domain

By Akihiko KITADA

In the present investigations, some discussions were made about the Uniqueness of solutions of an initial-boundary value problem in a semi-infinite domain in one dimension for the general nonlinear equation of parabolic type (*)

$$u_t - F(x, t, u, u_x, u_{xx}) = 0 \tag{$*$}$$

Followings were proved to be sufficient for the initial-boundary value problem—equation (*) $(x>0,\ t>0)$, $u(x, 0)=\alpha(x)$ $(x\geq 0)$ and $b_1(t)u_x(0, t)+b_2(t)u(0, t)=\beta(t)$, $b_1(t)\geq\delta>0$ $(t\geq 0)$—to have no more than one classical solution in the class of bounded functions whose first and second derivatives are also bounded.

For arbitrary fixed $T>0$ and $N>0$,

$$\frac{\partial F(x, t, u, p, q)}{\partial q} > 0, \quad \sup_{\substack{(x,t)\in\Pi_T \\ |u,p,q|\leq N}} \frac{\partial F(x, t, u, p, q)}{\partial q} \leq \nu_1(T, N)$$

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\Pi_T \\ |u,p,q|\leq N}} \left|\frac{\partial F(x, t, u, p, q)}{\partial p}\right| \leq \nu_2(T, N), \quad \sup_{\substack{(x,t)\in\Pi_T \\ |u,p,q|\leq N}} \frac{\partial F(x, t, u, p, q)}{\partial u} \leq \nu_3(T, N)$$

where ν_1, ν_2 and ν_3 are, respectively, some constants depending on both T and N, and Π_T is the set of the form $\{x>0, 0<t\leq T\}$.

1. 高分子科学における Wang, Kwei および Frisch の非 Fick 型拡散方程式[1),2)]に代表される物理化学上の準線型放物型方程式の初期値・境界値問題の解に関する議論は，より一般な非線型放物型方程式 (1)

$$u_t - F(x, t, u, u_x, u_{xx}) = 0 \tag{1}$$

の半無限領域における初期値・境界値問題の解に関する議論として一般化される。本稿では境界条件が Robin 型である場合の，方程式 (1) の応用上重要な半直線 $[0, \infty)$ 上の初期値・境界値問題について，特にその解の一意性に関して検討を加える。一般に初期値が一定であり，境界条件が斉次 Neumann 型である場合には解の存在，一意性，非負性あるいは安定性等の諸性質は，以下の如く常微分方程式の初期値問題におけるそれらとして極めてたやすく議論される。

* 自然科学研究室

すなわち，個体群生態学や固体物理化学等においてよく現われる境界からの，種あるいは物質の出入りを許さない反応拡散現象を記述する，斉次 Neumann 型境界条件を持つ半直線上の初期値・境界値問題 (*)

$$\left.\begin{array}{l} u_t-u_{xx}-u(1-u)=0 \quad (x>0,\ t>0) \\ u(x,0)\equiv u_0 \quad (x\geq 0) \\ u_x(0,t)\equiv 0 \quad (t\geq 0) \end{array}\right\} \qquad (*)$$

は，Bernoulli 型常微分方程式の初期値問題 (*・*)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt}-u(1-u)=0 \\ u(0)=u_0 \end{array}\right\} \qquad (*\cdot*)$$

として扱われる[3]。この場合解の一意性あるいはその他解の諸性質に関する議論は，この非線型常微分方程式の初期値問題自身あるいはその解

$$u(t)=u_0/(1-u_0)e^t-u_0$$

の性質に関する議論に還元される。

これらの事情を，より一般な非線型放物型方程式に対する半直線における初期値・境界値問題 (2-a)，(2-b) および (2-c)

$$u_t-F(t,u,u_x,u_{xx})=0 \quad (x>0,\ t>0) \tag{2-a}$$

$$u(x,0)\equiv u_0 \quad (x\geq 0) \tag{2-b}$$

$$u_x(0,t)\equiv 0 \quad (t\geq 0) \tag{2-c}$$

の場合に一般化して検討してみる。

今，非線型項 $F(t,u,p,q)$ に関して，任意に固定した $T>0$ および $N>0$ に対して以下の関係 (3) が成り立っているとする。

$$\frac{\partial F(t,u,p,q)}{\partial q}>0, \qquad \sup_{\substack{0<t\leq T \\ |u,p,q|\leq N}} \frac{\partial F(t,u,p,q)}{\partial q}\leq \mu_1(T,N)$$

$$\sup_{\substack{0<t\leq T \\ |u,p,q|\leq N}} \left|\frac{\partial F(t,u,p,q)}{\partial p}\right|\leq \mu_2(T,N), \qquad \sup_{\substack{0<t\leq T \\ |u,p,q|\leq N}} \frac{\partial F(t,u,p,q)}{\partial u}\leq \mu_3(T,N) \tag{3}$$

ここで $\mu_i(i=1,2,3)$ は T および N に依存した定数である。

$\tilde{u}(x,t)$ を，(2-a)，(2-b) および (2-c) の，その位置 x に関する1階および2階導関数 u_x および u_{xx} がそれ自身とともに領域

$$\Pi_T=\{x>0, 0<t\leq T(\forall\, T>0)\}$$

で有界であり，かつ時間 t および位置 x に関する2つの導関数 u_{tx} および u_{xt} がそれぞれ連続である様な古典解とする。線型放物型方程式の，Dirichlet 型境界条件を持つ半直線上の初期値・境界値問題の解に対する最大値原理 (Appendix) を以下の (4-a)，(4-b) および (4-c)

$$\tilde{u}_{xt}-\frac{\partial F(t,\tilde{u},\tilde{u}_x,\tilde{u}_{xx})}{\partial \tilde{u}_{xx}}\tilde{u}_{xxx}-\frac{\partial F(t,\tilde{u},\tilde{u}_x,\tilde{u}_{xx})}{\partial \tilde{u}_x}\tilde{u}_{xx}-\frac{\partial F(t,\tilde{u},\tilde{u}_x,\tilde{u}_{xx})}{\partial \tilde{u}}\tilde{u}_x=0 \quad (x>0,\ t>0) \tag{4-a}$$

$$\tilde{u}_x(x,0)\equiv 0 \quad (x\geq 0) \tag{4-b}$$

$$\tilde{u}_x(0,t)\equiv 0 \quad (t\geq 0) \tag{4-c}$$

に適用すれば $x_0\geq 0$，$t_0>0$ なる任意の点 (x_0,t_0) において，領域 Π_{t_0} と u, u_x および u_{xx} の大きさとから定まる上記の定数 μ_3 を用いて，$\tilde{u}_x(x,t)$ に関する評価

$$|\tilde{u}_x(x_0, t_0)| \leq \Big(\sup_{x \geq 0} |\tilde{u}_x(x, 0)| + \sup_{0 \leq t \leq t_0} |\tilde{u}_x(0, t)| \Big) e^{\mu_3 t_0} = 0$$

を得るから直ちに解についての性質

$$\tilde{u}(x, t) \equiv u(t)$$

を得る。すなわち (2-a), (2-b) および (2-c) の上記の性質を有する古典解は以下の常微分方程式の初期値問題 (5-a) および (5-b)

$$\frac{du}{dt} - F(t, u, 0, 0) = 0 \tag{5-a}$$

$$u(0) = u_0 \tag{5-b}$$

を満していることになる。

以下では，この様には議論がたやすく常微分方程式の場合に還元されない，より一般な形の初期値・境界値問題についてその解の一意性に関して検討を加える。*

2. 非有界領域における，Robin 型境界条件を持つ初期値・境界値問題の解に関する最大値原理[5)~7)]を以下の Lemma において半直線における同問題の解に関して反省する。

[Lemma]

$$u_t - a(x, t) u_{xx} + b(x, t) u_x + c(x, t) u = f(x, t) \quad (x > 0, t > 0) \tag{6-a}$$

$$u(x, 0) = \alpha(x) \quad (x \geq 0) \tag{6-b}$$

$$b_1(t) u_x(0, t) + b_2(t) u(0, t) = \beta(t) \quad (t \geq 0) \tag{6-c}$$

ここで Π_T においてそれぞれ，$a(x, t)$ は上に有界，$b(x, t)$ は上下に有界および $c(x, t)$ は下に有界とする。また $a(x, t) > 0$, $b_1(t) \geq \exists\, \delta > 0$ および $b_2(t) \geq -b_0$ $(b_0 \geq 0)$ を仮定する。さらに $x \geq 0$ においてその 2 階までの導関数 $d\varphi/dx$, $d^2\varphi/dx^2$ がそれ自身とともに有界であり，かつ

$$\inf_{x \geq 0} \varphi(x) \geq \frac{1}{2}, \quad \varphi(0) = 1, \quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} > \frac{b_0}{\delta}$$

を満す関数 $\varphi(x)$ を導入する。このとき (6-a), (6-b) および (6-c) の有界な古典解 $u(x, t)$ に関して，任意の点 (x_0, t_0) $(x_0 \geq 0, t_0 > 0)$ において以下の評価 (7) が成り立つ。

$$|u(x_0, t_0)| \leq \xi \Big(\sup_{x \geq 0} |\alpha(x)| + \sup_{0 \leq t \leq t_0} |\beta(t)| + t_0 \sup_{\Pi_{t_0}} |f(x, t)| \Big) e^{A t_0} \tag{7}$$

ここで ξ および A は $b_i(t)$ $(i=1, 2)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ および $\varphi(x)$ とに依存する定数である。

(Proof)

$$v(x, t) = u(x, t)\varphi(x)$$

と置く。$v(x, t)$ は以下の初期値・境界値問題 (8-a), (8-b) および (8-c) を満す。

$$\begin{aligned} \mathscr{L} v \equiv\ & v_t - a(x, t) v_{xx} + b(x, t) v_x + c(x, t) v \\ & - 2\varphi(x) a(x, t) \frac{d\varphi^{-1}}{dx} v_x + \varphi(x) \left[b(x, t) \frac{d\varphi^{-1}}{dx} - a(x, t) \frac{d^2\varphi^{-1}}{dx^2} \right] v = f(x, t)\varphi(x) \end{aligned} \tag{8-a}$$

$$v(x, 0) = \alpha(x)\varphi(x) \tag{8-b}$$

$$b_1(t) v_x(0, t) + \gamma(t) v(0, t) = \beta(t)\varphi(0) \quad \left(\gamma(t) = b_2(t) - \frac{b_1(t)}{\varphi(0)} \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} > 0 \right) \tag{8-c}$$

---

* 初期値問題に関しては，かなり一般な準線型放物型方程式に対しても常微分方程式の定性理論により解の性質が詳しく吟味されている[4)]。

今，R を正の任意のパラメータとして補助関数 w を

$$w(x,t)=v(x,t)e^{-a_0t}-c_1-c_2t-\frac{M}{R^2}(x^2+c_3t)$$

で定義する。ここで c_1, c_2, M および a_0 はそれぞれ以下の通りである。η は任意の正定数。

$$c_1=\eta+\sup_{x\geq 0}|\alpha(x)|\varphi(x)+\sup_{0\leq t\leq t_0}\frac{|\beta(t)|\varphi(0)}{\gamma(t)}$$

$$c_2=\sup_{\Pi_{t_0}}|f(x,t)|\varphi(x)\ ,\quad M=\sup_{\Pi_{t_0}}|v(x,t)|$$

$$a_0=\max\left\{0;\ -\inf_{\Pi_{t_0}}\left(a(x,t)-\varphi(x)\left[b(x,t)\frac{d\varphi^{-1}}{dx}-a(x,t)\frac{d^2\varphi^{-1}}{dx^2}\right]\right)\right\}$$

x_0 を含む $Q_{t_0}(R)=\{0<x<R, 0<t\leq t_0\}$ なる領域を考える。ここで c_3 を十分大きくとれば，

$$(\mathscr{L}+a_0)w(x,t)\leq 0$$

と出来る。一方 $Q_{t_0}(R)$ のいわゆる放物境界上での $w(x,t)$ の値はそれぞれ

$$w(x,0)=v(x,0)-c_1-\frac{Mx^2}{R^2}$$

$$w(0,t)=v(0,t)e^{-a_0t}-c_1-c_2t-\frac{Mc_3t}{R^2}$$

$$w(R,t)=v(R,t)e^{-a_0t}-c_1-c_2t-\left(M+\frac{Mc_3t}{R^2}\right)$$

となり η を適当にとることによりいずれも非正となる。従って線型方程式に対する有界領域での最大値原理[7]が適用出来て $Q_{t_0}(R)$ の閉包 $\overline{Q_{t_0}(R)}$ 全体で $w(x,t)\leq 0$ となる。従って

$$v(x_0,t_0)\leq\left(c_1+c_2t_0+\frac{M}{R^2}(x_0{}^2+c_3t_0)\right)e^{a_0t_0}$$

となるが，ここで $R\uparrow\infty$ とすることにより，上からの評価

$$u(x_0,t_0)\leq\left(\frac{c_1}{\varphi(x)}+t_0\sup_{\Pi_{t_0}}|f(x,t)|\right)e^{a_0t_0}$$

を得る。一方，下からの評価に関しては補助関数 w を次の $\hat{w}$ におきかえれば良い。

$$\hat{w}(x,t)=v(x,t)e^{-a_0t}+c_1+c_2t+\frac{M}{R^2}(x^2+c_3t)$$

このとき以下の関係

$$(\mathscr{L}+a_0)\hat{w}\geq 0$$

$$\hat{w}(x,0)=v(x,0)+c_1+\frac{Mx^2}{R^2}\geq 0$$

$$\hat{w}(0,t)=v(0,t)e^{-a_0t}+c_1+c_2t+\frac{Mc_3t}{R^2}\geq 0$$

$$\hat{w}(R,t)=v(R,t)e^{-a_0t}+c_1+c_2t+M+\frac{\mathrm{M}c_3t}{R^2}\geq 0$$

が成り立つから下からの評価も同様に得られる。この Lemma を用いれば一般非線型放物型方程式 (1) の，半直線における Robin 型境界条件を持つ初期値・境界値問題 (1)，(6-b) および (6-c) の解の一意性に関して以下の proposition を得る。

[Proposition] 非線型放物型方程式 (1) において以下の関係 (9) が任意の $T>0$ および $N>0$ に対して成り立っているとする。

$$\frac{\partial F(x,t,u,p,q)}{\partial q}>0\ , \quad \sup_{\substack{(x,t)\in\Pi_T\\|u,p,q|\le N}} \frac{\partial F(x,t,u,p,q)}{\partial q}\le\nu_1(T,N)$$

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\Pi_T\\|u,p,q|\le N}}\left|\frac{\partial F(x,t,u,p,q)}{\partial p}\right|\le\nu_2(T,N)\ , \quad \sup_{\substack{(x,t)\in\Pi_T\\|u,p,q|\le N}}\frac{\partial F(x,t,u,p,q)}{\partial u}\le\nu_3(T,N) \tag{9}$$

ここで $\nu_i(i=1,2,3)$ はいずれも T および N に依存する非負の定数である。この時，初期値・境界値問題 (1)，(6-b) および (6-c)* は，位置 x に関する 1 階および 2 階導関数がそれ自身とともに Π_T で有界である様な関数族の中で 1 つ以上の古典解を持たない。

(Proof) $u'(x,t)$ および $u''(x,t)$ をそれぞれ (1)，(6-b) および (6-c) の，1 階および 2 階導関数がそれ自身とともに有界である様な 2 つの古典解とする。今それらの差 $u'(x,t)-u''(x,t)$ を $u(x,t)$ と書き，$u^\tau(x,t)$ を

$$u^\tau(x,t)=\tau u'(x,t)+(1-\tau)u''(x,t)$$

で定義する。その時

$$u_t-F(x,t,u',u'_x,u'_{xx})+F(x,t,u'',u''_x,u''_{xx})=0$$

において

$$\begin{aligned}&F(x,t,u'',u''_x,u''_{xx})-F(x,t,u',u'_x,u'_{xx})\\&=-\int_0^1\frac{dF(x,t,u^\tau,u^\tau_x,u^\tau_{xx})}{d\tau}\,d\tau\\&=-\left\{u_{xx}\int_0^1\frac{\partial F(x,t,u^\tau,u^\tau_x,u^\tau_{xx})}{\partial u^\tau_{xx}}\,d\tau+u_x\int_0^1\frac{\partial F(x,t,u^\tau,u^\tau_x,u^\tau_{xx})}{\partial u^\tau_x}\,d\tau\right.\\&\qquad\left.+u\int_0^1\frac{\partial F(x,t,u^\tau,u^\tau_x,u^\tau_{xx})}{\partial u^\tau}\,d\tau\right\}\end{aligned}$$

であるから，

$u(x,0)\equiv0$ $(x\ge0)$，$b_1(t)u_x(0,t)+b_2(t)u(0,t)\equiv0$ $(t\ge0)$ なる初期条件および境界条件の下で線型方程式に関しての Lemma が適用出来て目的の結果を得る。なお $\partial F/\partial q$，$\partial F/\partial p$ および $\partial F/\partial u$ について連続性も仮定すれば，平均値の定理から

$$\begin{aligned}&u_t-F(x,t,u',u'_x,u'_{xx})+F(x,t,u'',u''_x,u''_{xx})\\&=u_t-\left\{\frac{\partial F}{\partial q}u_{xx}+\frac{\partial F}{\partial p}u_x+\frac{\partial F}{\partial u}u\right\}=0\end{aligned}$$

となるから，その場合は proposition の結論は直ちに得られる。

Appendix[8)]

境界条件が Dirichlet 型である初期値・境界値問題 (†) を考える。

$$\left.\begin{aligned}&u_t-a(x,t)u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u=f(x,t)\ ,\quad a(x,t)>0\quad(x>0,t>0)\\&u(x,0)=\theta(x)\quad(x\ge0)\\&u(0,t)=\zeta(t)\quad(t\ge0),\ \theta(0)=\zeta(0)\end{aligned}\right\} \tag{†}$$

ここで $\Pi_T=\{x>0,0<t\le T\ (\forall T>0)\}$ においてそれぞれ $a(x,t)$ は上に有界，$b(x,t)$ は上下に有界および $c(x,t)$ は下に有界とする。このとき初期値・境界値問題 (†) の有界な古典解 $u(x,t)$ に関して以下の評価式 (†･†) が成り立つ。

---

* $b_i(t)$ $(i=1,\ 2)$ 等に対して，Lemma において付された条件はそのまま成り立つとする。

$$|u(x_0, t_0)| \leq \left(\sup_{x \geq 0} |u(x, 0)| + \sup_{0 \leq t \leq t_0} |u(0, t)| + t_0 \sup_{\Pi_{t_0}} |f(x, t)| \right) e^{c_0 t_0} \quad (\text{†·†})$$

ここで (x_0, t_0) は $x_0 \geq 0, t_0 > 0$ なる任意の点であり $c_0 \geq 0$ は

$$\inf_{\Pi_{t_0}} c(x, t) \geq -c_0$$

なる定数である。

謝　　辞

本研究を行うにあたり，多大な御援助を賜わった早稲田大学理工学部数学教室の入江昭二教授ならびに通産省工業技術院製品科学研究所の林博行技官に深甚なる謝意を表します。

文　　献

1) T. T. Wang, T. K. Kwei and H. L. Frisch: Diffusion in glassy polymers. *J. Polym. Sci.*, **A2**, **7** (1969), 2019.
2) W. F. Ames: Nonlinear Partial Differential Equations. Academic Press, 1972.
3) 例えば，田端正久：もう一つの数値解析——離散問題から連続問題へのフィードバック——入門現代の数学 [2]，数値解析と非線型現象，第2章，数学セミナー増刊，日本評論社，1981.
4) 亀高惟倫：a) 非線型拡散方程式について．数学，第 26 巻，第2号 (1974)，137. b) 非線型偏微分方程式．産業図書，1977.
5) T. Kato: a) Integration of the equation of evolution in a Banach space. *J. Math. Soc. Japan*, **5** (1953), 208. b) On the linear differential equations in Banach spaces. *Comm. Pure. Appl. Math.*, **9** (1956), 479. c) Nonlinear evolution equations in Banach spaces. *Proc. Sympos. Appl. Math.*, vol. 17 Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1965, 50.
6) S. N. Kruzkov: On the a priori estimation of solutions of linear parabolic equations and of solutions of boundary value problems for a certain class of quasi-linear parabolic equations. *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 764.
7) O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Translations of Mathematical Monographs, vol. 23, American Mathematical Society, 1968.
8) 北田韶彦：a) ある非 Fick 型拡散方程式の初期値・境界値問題の解の一意性．日本体育大学紀要，第9号 (1980), 73. b) 表面科学における非線型反応—拡散方程式の初期値・境界値問題．日本表面科学会，第1回表面科学討論会予稿，1982. c) On Boundary Problems for Nonlinear Reaction-Diffusion Equation in Semi-Infinite Domain. (to appear)